Teorema della media integrale

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Allora

$$\inf_{[a,b]}(f) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]}(f).$$

Se f è anche continua allora

$\exists\ z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

<u>dim</u>: $\forall\ x \in [a,b]$ risulta

$$\inf_{[a,b]}(f) \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]}(f)$$

integro e uso 3)

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{\inf(f)}_{\text{costante}}\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le$$

$$\le \int_a^b \underbrace{\sup(f)}_{\text{costante}}\,dx$$

$$\inf(f)\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le$$

$$\le \sup(f)\,(b-a)$$

dividiamo tutto per $b-a$.

Se f è continua allora

$$\inf_{[a,b]}(f) = \min_{[a,b]}(f) \quad \text{Weierstrass.}$$

$$\sup(f) = \max(f)$$

e per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori tra $\min(f)$ e $\max(f)$.

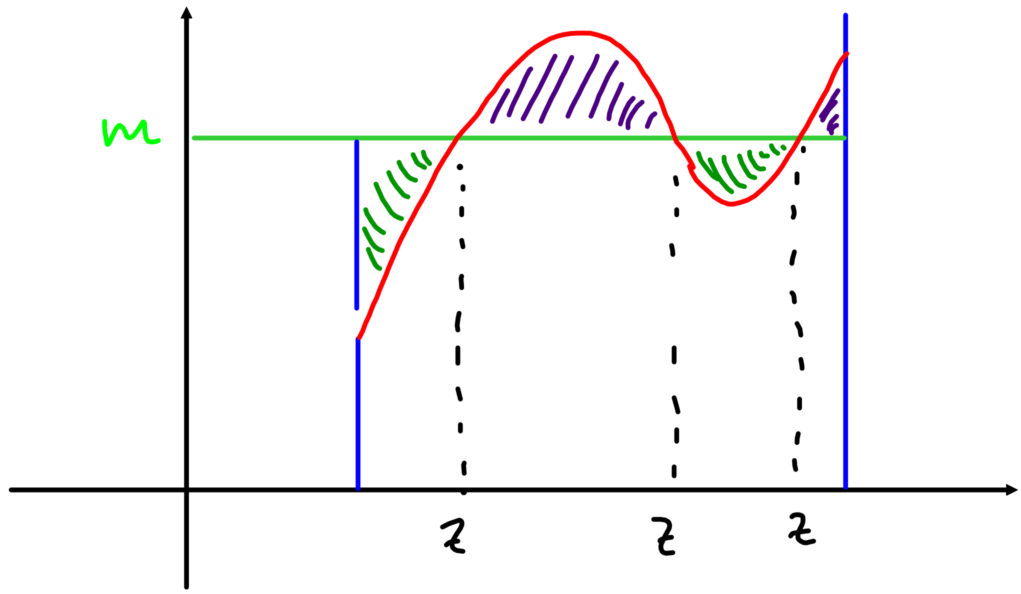
$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ è un

valore intermedio, allora

$\exists\, z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx .$$

$\square$



m
z
z
z

<u>Def</u>: Se $b < a$

definisco

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

inoltre definisco

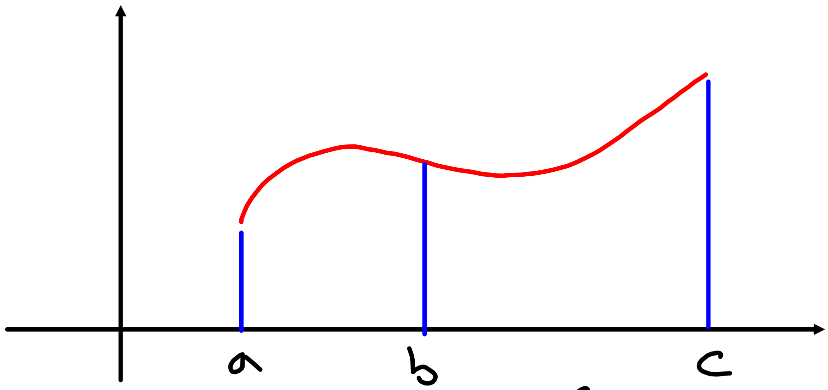
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad .$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

è ancora valido se

$$a < b < c \quad ?$$

$\boxed{\text{SI}}$



$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La media integrale vale anche con gli estremi scambiati? <u>SI</u>

Se $b < a$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx$$

quindi

$$\inf_{[a,b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f$$

comunque siano messi a e b

cioè anche se $b<a$

se $b<a \Rightarrow [a,b]$ si intende

come $[b,a]$

__Def__ : $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funzione

$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice __primitiva__

di f se F è derivabile in I

e $\quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Es: $f(x) = 2x$

$F(x) = x^2$ è una primitiva di f

perché $F'(x) = f(x)$.

Trovata una primitiva ne avete trovate infinite

$G(x) = x^2 + k \quad , \; k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow G'(x) = 2x = f(x)$

$\Rightarrow G$ è una primitiva di f.

Oss: Due primitive di f differiscono sempre per una costante.

dim: Se F e G sono primitive di f $\Rightarrow$

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$$

F e G sono definite su un intervallo quindi

$F - G$ è costante.

$$F - G = k \Rightarrow F = G + k$$

$\square$

Def: L'insieme di tutte le primitive di f si dice <u>integrale indefinito</u> di f

e si indica con

$$\int f(x)\,dx =$$

$$= \{ F : F \text{ è una primitiva di } f \}.$$

<u>Es</u>: $\displaystyle \int 2x\,dx = \{ x^2 + k : k \in \mathbb{R} \}$

questa notazione si abbrevia così

$$\int 2x\,dx = x^2 + k.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + k$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + k$$

se $x > 0 \Rightarrow D(\log x) = \frac{1}{x}$

se $x < 0 \Rightarrow D\left(\log(-x)\right) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

$n \neq -1$

$n \in \mathbb{Z}$.

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

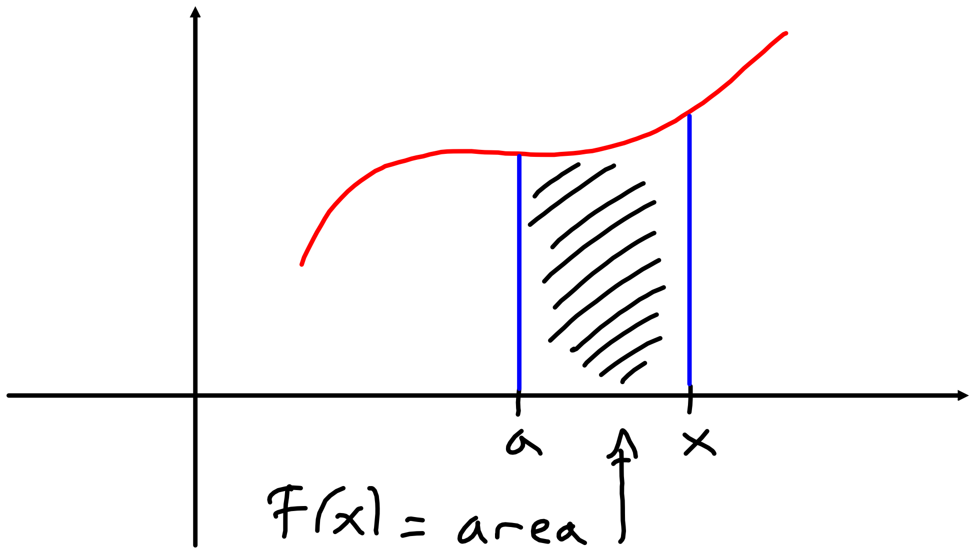
$\alpha \neq -1$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $a \in I$ punto qualsiasi, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

è una primitiva di f.



a
x
F(x) = area

dim: devo dimostrare che F è derivabile e $F'(x_0) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in I$. Calcolo

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F(x)} - \underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{F(x_0)}\right)$$

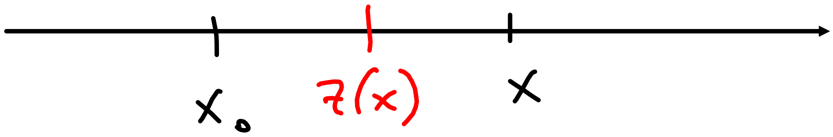
$$= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt =$$

media integrale di f sull'intervallo di estremi x_0 e x.

$$= f(z(x))$$ con $z(x)$ punto compreso fra x_0 e x.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} f(z(x))$$



se $x \to x_0 \Rightarrow z(x) \to x_0$ per il teorema dei Carabinieri.

cambio variabile nel limite

pongo $z(x) = y$

$$\lim_{x \to x_0} f(z(x)) = \lim_{y \to x_0} f(y) = f(x_0)$$

perché f è continua.

$$\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

$\square$

Teorema di Torricelli.

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo

$a \in I$ fissato. Se G è una primitiva di f allora $\exists\, k$ t.c.

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$$

e $\forall\, \alpha, \beta \in I$ risulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Notazione

$$G(\beta)-G(\alpha)=\Big[G(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}.$$

variazione di G tra α e β.

Es:

$$\int_1^3 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 .$$

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, $A \subset \mathbb{R}$

$\alpha: A \to I$, $\beta: A \to I$ derivabili.

Definisco

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$$

Allora G è derivabile e

$$G'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

$\underline{\text{Es}}$: $G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^t \operatorname{arctg} t \, dt$

calcolare $G'(x)$.

$\alpha(x) = x^2 \quad \beta(x) = \sin x$

$f(t) = e^t \operatorname{arctg} t$

$$G'(x) = e^{\sin x} \operatorname{arctg}(\sin x) \cdot \underbrace{\cos x}_{\beta'}$$

$$- e^{(x^2)} \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \underbrace{2x}_{\alpha'}$$

Es: $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{0}^{x^2} e^t \operatorname{arctg} t \, dt}{\sin(x^4)} = \frac{0}{0}$$

α

de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{e^{(x^2)}}^{\to 1} \operatorname{arctg}(x^2)\cdot 2x - 0}{\underbrace{\cancel{\cos(x^4)}}_{1} \cdot 4x^3} = \frac{1}{2}$$

α'

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)\cdot 2\cancel{x}}{4x^{\cancel{3}\,2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)\cdot 2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t).$$